

Curs 7

Modelarea problemelor de rețea și distribuție (II)

Modelarea și analiza datelor pentru decizii de management

Conf.dr.ing. Lăcrimioara GRAMA

Anul 2 master · Tehnologii, Sisteme și Aplicații pentru eActivități

Facultatea de Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca



Cursul precedent



Modelarea problemelor de rețea și distribuție (I)

- ✓ Probleme de transport
- ✓ Probleme de transbordare / trafic combinat
- ✓ Probleme de atribuire / alocare
- ✓ Cazuri speciale & exemple

La finalul acestui curs, studenții vor putea să:

- explice rolul problemelor de rută minimă și flux maxim în modelarea rețelelor;
- formuleze modele LP pentru probleme de aflare a celei mai scurte rute și pentru probleme de flux maxim;
- interpreteze soluțiile optime în termeni de rute, fluxuri, capacități și costuri;
- adapteze modelele de trafic combinat pentru aplicații de planificare a producției și stocului;
- recunoască utilizarea modelelor de rețea în aplicații manageriale reale.

Obiectivele cursului



Cuprins

Probleme de aflare a celei mai scurte rute

- Model LP
- Exemple: Nord Construct, ACA

Probleme de flux maxim

- Model LP
- Exemplu: TransGaz
- Optimizarea capacității de restaurare în rețeaua AT&T

Aplicații ale modelelor de rețea

- Planificarea producției și gestionarea stocurilor
- Optimizarea rețelei Yellow Freight

Rezumat

Probleme de aflare a celei mai scurte rute

Problema de aflare a celei mai scurte rute urmărește determinarea unei rute de cost minim într-o rețea, de la un nod sau set de noduri la un alt nod sau set de noduri

Condiție

Dacă toate costurile asociate arcele au valori nenegative, se poate utiliza un algoritm de etichetare pentru a determina ruta minimă de la un nod dat la celelalte noduri din rețea

Criteriul de optimizare

Nu este neapărat **distanța**

- termenul „cea mai scurtă rută” este utilizat generic
- criteriul poate fi distanța, timpul, costul sau un alt indicator relevant
- timpul și costul nu sunt neapărat proporționale cu distanța parcursă



Probleme de aflare a celei mai scurte rute (cont.)

Formularea modelului LP



➤ Model matematic

Notații

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă arcul } i \rightarrow j \text{ este inclus în ruta aleasă} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

c_{ij} – distanța/ timpul/ costul asociat arcului $i \rightarrow j$

A – mulțimea arcelor rețelei

$$\text{Min} \quad \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \quad (\text{funcția obiectiv})$$

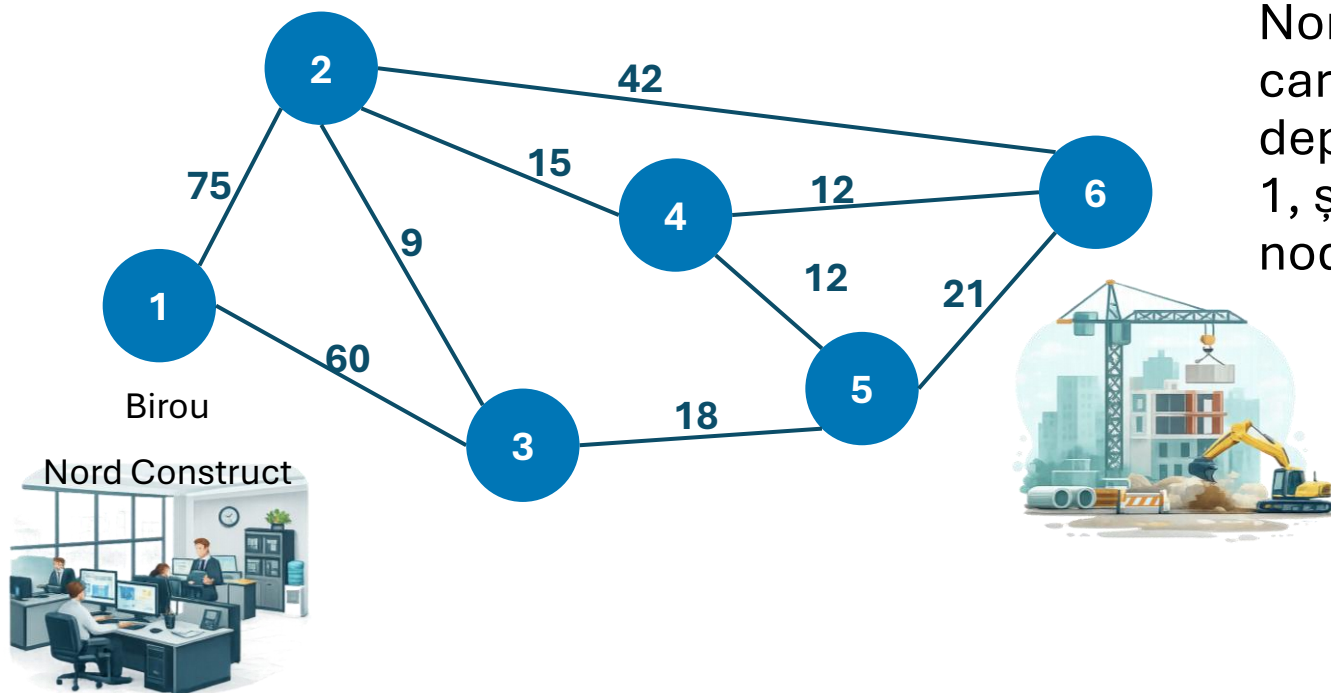
$$\text{s. t.} \quad \sum_{j: (i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{j: (j,i) \in A} x_{ji} = b_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

$$\text{unde: } b_i = \begin{cases} 1, & i = s \text{ nod sursă} \\ 0, & i \text{ nod intermediar} \\ -1, & i = t \text{ nod destinație} \end{cases}$$
$$x_{ij} \geq 0, \forall (i,j) \in A$$

Aflarea celei mai scurte rute: exemplu

Ex: Firma Nord Construct desfășoară mai multe proiecte de construcții în diferite județe. Unele șantiere se află la peste 20 km de sediul firmei, iar costurile zilnice de transport pentru personal, echipamente și materiale sunt semnificative.

Alternativele de transport dintre sediul firmei și șantiere pot fi reprezentate prin rețeaua rutieră din figură. Distanțele dintre noduri, exprimate în km, sunt indicate pe arcele corespunzătoare.

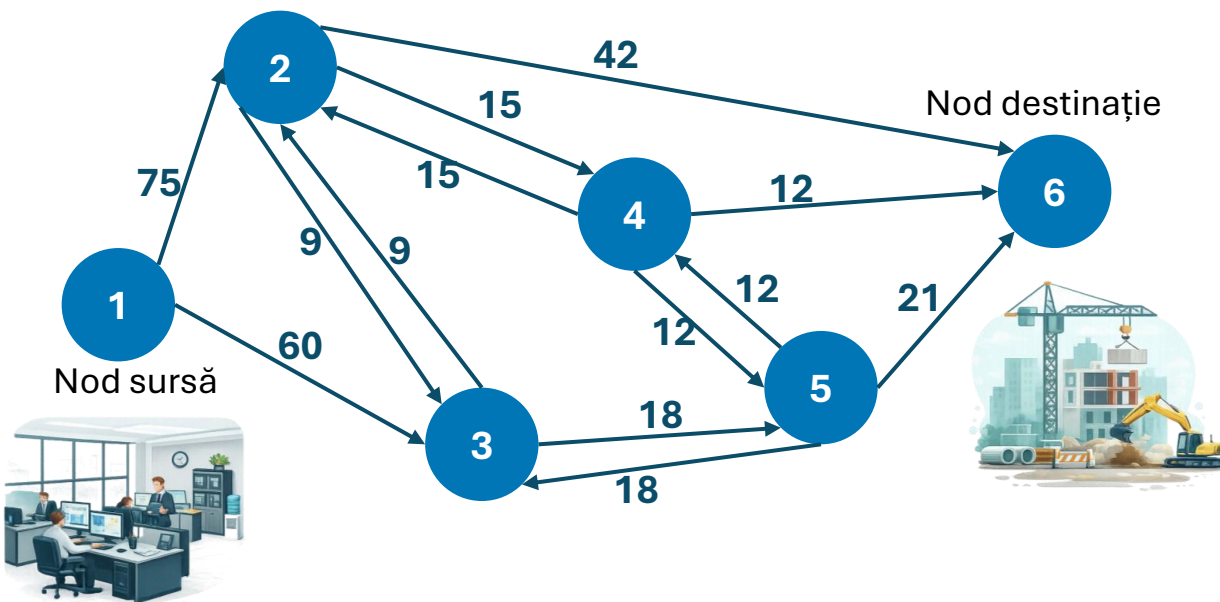


Nord Construct dorește să determine ruta care minimizează distanța totală de deplasare între sediul firmei, aflat în nodul 1, și șantierul de construcție, aflat în nodul 6.

Aflarea celei mai scurte rute: exemplu (cont.)

- Problema celei mai scurte rute pentru Nord Construct poate fi formulată ca o **problemă de trafic combinat cu o unitate de flux**

- nod sursă: nodul 1
- nod destinație: nodul 6
- noduri intermediare: 2, 3, 4 și 5
- o unitate de flux care trebuie trimisă din nodul 1 în nodul 6



- Săgețile indică sensul de parcurgere al unei legături

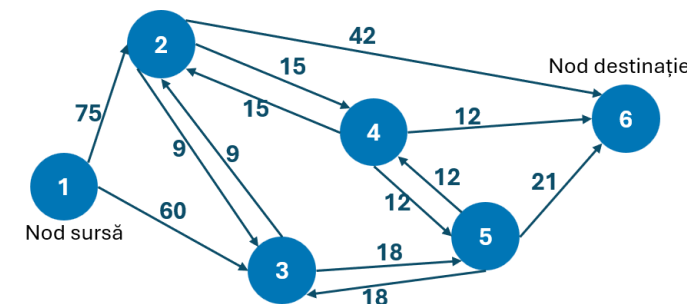
- Un arc $2 \rightarrow 3$ indică faptul că ruta selectată poate parcurge legătura de la nodul 2 la nodul 3
- Un arc $3 \rightarrow 2$ indică faptul că ruta selectată poate parcurge aceeași legătură în sens invers
- Pentru legăturile dintre nodurile intermediare, distanța este aceeași în ambele sensuri

Aflarea celei mai scurte rute: exemplu (cont.)

Variabile de decizie

x_{ij} – numărul de unități de flux expediate pe arcul $i \rightarrow j$

- Deoarece numai o unitate va fi expedită de la nodul 1 la nodul 6, valoarea x_{ij} va fi fie 1, fie 0
 - Dacă $x_{ij} = 1$, arcul $i \rightarrow j$ este pe cea mai scurtă rută de la nodul 1 la nodul 6
 - Dacă $x_{ij} = 0$, arcul $i \rightarrow j$ nu se află pe cea mai scurtă rută



Funcția obiectiv

$$\text{Min } 75x_{12} + 60x_{13} + 9x_{23} + 9x_{32} + 15x_{24} + 15x_{42} + 42x_{26} + 18x_{35} + 18x_{53} + 12x_{45} + 12x_{54} + 12x_{46} + 21x_{56}$$

➤ Constrângeri

C1: nod sursă (oferta din nodul 1 este 1 $\Rightarrow$ expedierea din nodul 1 trebuie să fie tot 1)

$$\text{Nod 1: } x_{12} + x_{13} = 1$$

C2 – C5: noduri intermediare

$$\text{Nod 2: } x_{23} + x_{24} + x_{26} = x_{12} + x_{32} + x_{42}$$

$$\text{Nod 3: } x_{32} + x_{35} = x_{13} + x_{23} + x_{53}$$

$$\text{Nod 4: } x_{42} + x_{45} + x_{46} = x_{24} + x_{54}$$

$$\text{Nod 5: } x_{53} + x_{54} + x_{56} = x_{35} + x_{45}$$

C6: nod destinație (cererea din nodul 6 este 1 $\Rightarrow$ expedierea în nodul 6 trebuie să fie tot 1)

$$\text{Nod 6: } x_{26} + x_{46} + x_{56} = 1$$

Exemplu – modelul LP complet

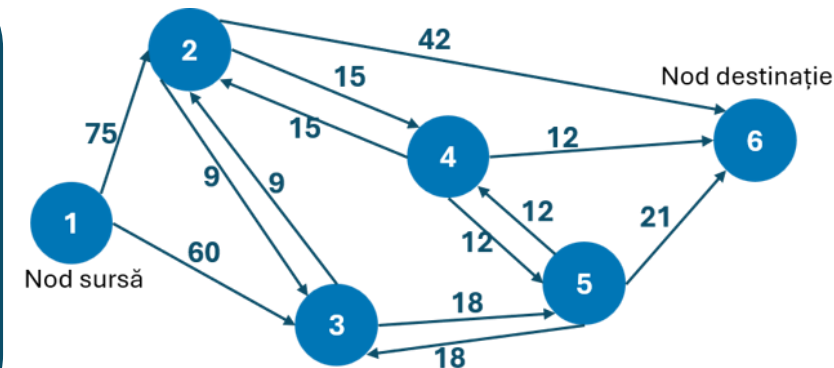
➤ Modelul matematic

Min	$75x_{12}$	$+60x_{13}$	$+9x_{23}$	$+9x_{32}$	$+15x_{24}$	$+15x_{42}$	$+42x_{26}$	$+18x_{35}$	$+18x_{53}$	$+12x_{45}$	$+12x_{54}$	$+12x_{46}$	$+21x_{56}$	
s. t.	x_{12}	$+x_{13}$												$= 1$
	$-x_{12}$		$+x_{23}$	$-x_{32}$	$+x_{24}$	$-x_{42}$	$+x_{26}$							$= 0$
		$-x_{13}$	$-x_{23}$	$+x_{32}$				$+x_{35}$	$-x_{53}$					$= 0$
					$-x_{24}$	$+x_{42}$				$+x_{45}$	$-x_{54}$	$+x_{46}$		$= 0$
								$-x_{35}$	$+x_{53}$	$-x_{45}$	$+x_{54}$		$+x_{56}$	$= 0$
							x_{26}					$+x_{46}$	$+x_{56}$	$= 1$
	x_{ij}	$\geq 0,$	$\forall$	i, j										

OBS:

În problema Nord Construct, drumurile sunt considerate bidirecționale

- Pentru fiecare drum bidirecțional dintre două noduri intermediare se introduc două arce orientate, câte unul pentru fiecare sens
- De exemplu, legătura dintre nodurile 2 și 3 conduce la variabilele x_{23} și x_{32}
- Dacă drumul ar fi cu sens unic din nodul 2 spre nodul 3, variabila x_{32} nu ar mai fi inclusă în model



Exemplu – soluția optimă

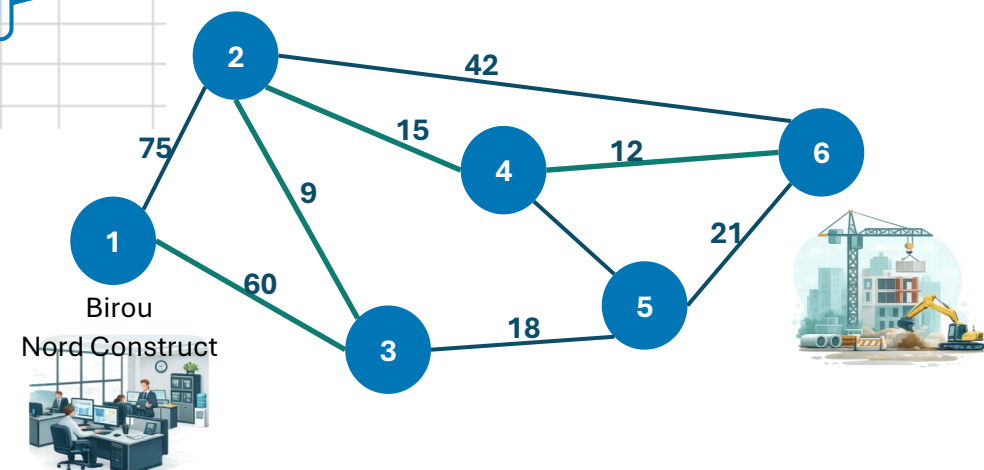
Arc		Distanța	Variabile decizie	PE calea cea mai scurtă?
Nod început	Nod final			
1	2	75	0	
1	3	60	1	Da
2	3	9	0	
3	2	9	1	Da
2	4	15	1	Da
4	2	15	0	
2	6	42	0	
3	5	18	0	
5	3	18	0	
4	5	12	0	
5	4	12	0	
4	6	12	1	Da
5	6	21	0	

Nod	Unitati expediate		Expedieri retea		Oferta
	Iesire	Intrare			
1	1	0	1	=	1
2	1	1	0	=	0
3	1	1	0	=	0
4	1	1	0	=	0
5	0	0	0	=	0
6	0	1	-1	=	-1

Minimizare distanta totala 96

Cea mai scurtă rută între biroul Nord Construct, situat în nodul 1, și șantierul situat în nodul 6 are lungimea de **96 km**

Ruta optimă este: **1 → 3 → 2 → 4 → 6**



Observații

Modelarea rețelei rutiere

Multe orașe utilizează modele computerizate ale rețelelor rutiere pentru a ajuta vehiculele de intervenție să identifice rapid ruta optimă către o anumită locație

- fiecare intersecție poate fi reprezentată ca un nod al rețelei
- străzile care leagă intersecțiile pot fi reprezentate ca arce

Criteriul de optimizare

Criteriul optimizat este, de multe ori, **timpul de deplasare**, nu distanța

- timpul de parcurgere a unui segment de drum poate varia în funcție de ziua săptămânii și ora din zi
- lucrările de construcție și întreținere pot modifica frecvent condițiile de trafic



Impact în situații de urgență

În situații de urgență, determinarea rapidă a rutei optime poate avea impact direct asupra timpului de intervenție

- vieți omenești și bunuri pot fi salvate sau pierdute în funcție de promptitudinea intervenției

Aflarea celei mai scurte rute: exemplu

¹ Cliff Ragsdale. Spreadsheet Modeling & Decision Analysis: A Practical Introduction to Business Analytics. Cengage Learning; 8 ed.

Ex¹: Asociația American Car (ACA) oferă membrilor săi servicii de sprijin pentru călătorii: informații despre destinații, rezervări la hoteluri, asistență rutieră de urgență și planificarea rutelor.

Planificarea rutelor este unul dintre cele mai utilizate servicii. Membrii indică orașele pe care doresc să le includă în călătorie, iar ACA determină o rută optimă între acestea.

Baza de date ACA conține informații despre:

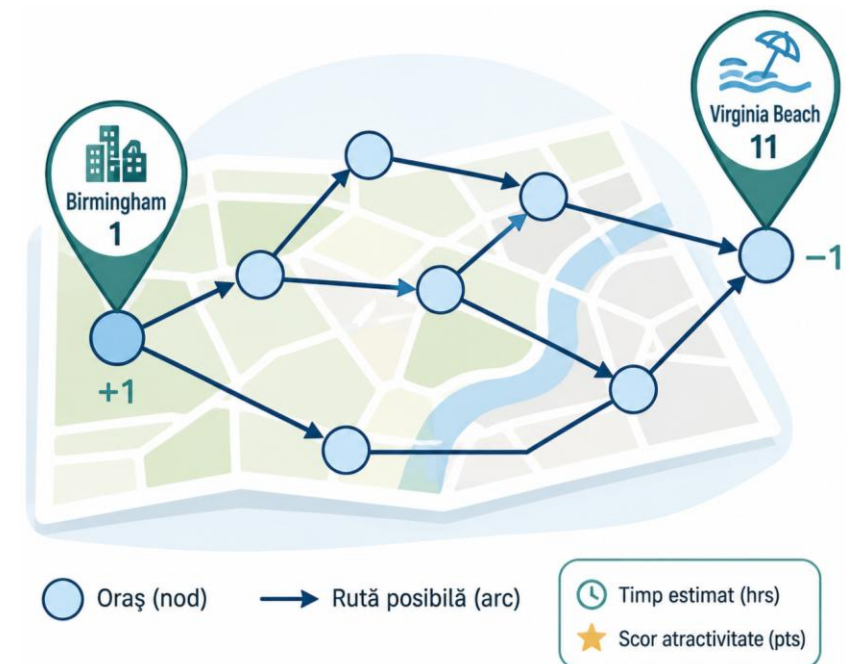
- autostrăzi și drumuri interstatale;
- întârzieri și ocoliri necesare;
- timpi estimați de călătorie pe segmente de drum;
- evaluări privind caracterul pitoresc al traseelor.

Membrii ACA au adesea obiective diferite în planificarea călătoriilor:

Obiective posibile ale membrilor:

- minimizarea timpului total de călătorie;
- identificarea traseului cu cel mai mare scor de atractivitate.

ACA dorește să dezvolte un sistem automat care să recomande membrilor un plan optim de călătorie.



Aflarea celei mai scurte rute: exemplu (cont.)

Pentru a ilustra utilizarea modelelor de rută minimă, considerăm rețeaua simplificată din figură, asociată unei călătorii de la Birmingham, Alabama, la Virginia Beach, Virginia.

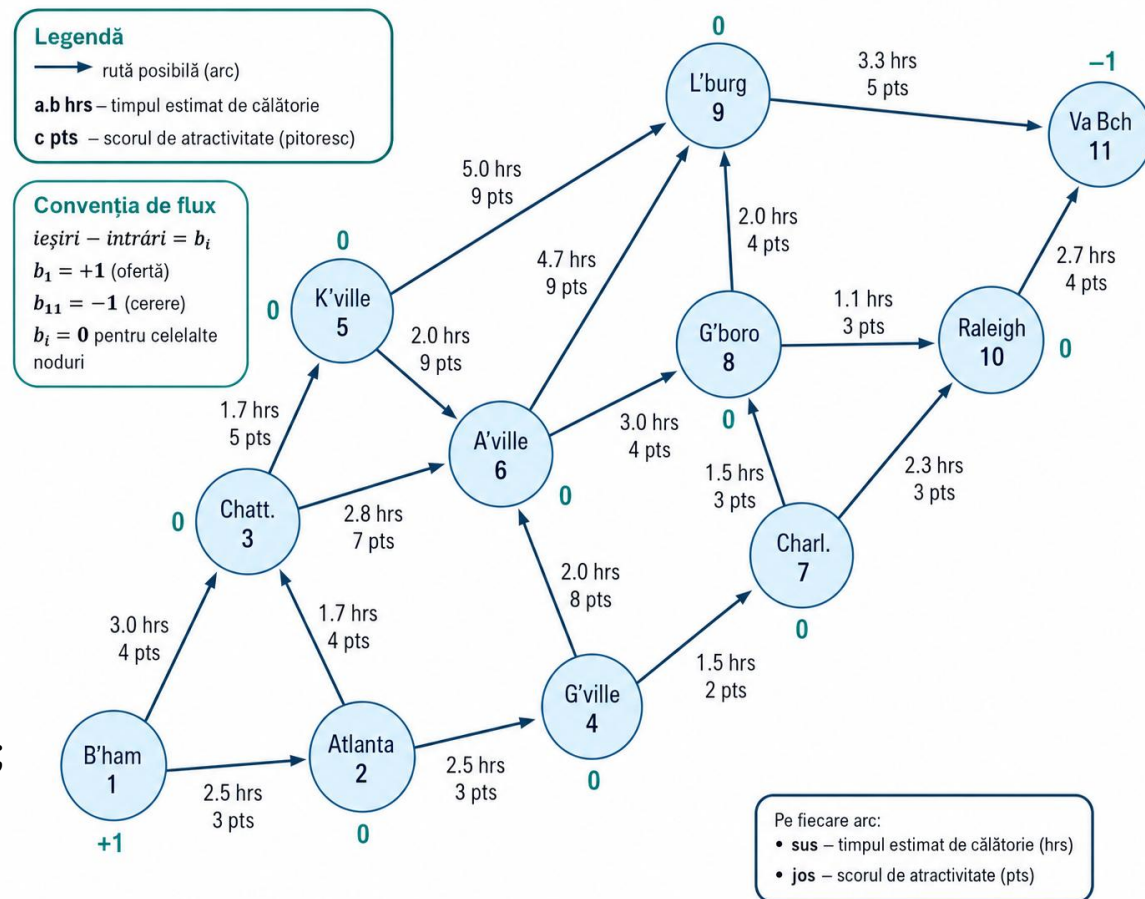
- Nodurile reprezintă orașe, iar arcele reprezintă rute posibile între orașe
- Pentru fiecare arc sunt indicate două informații:
 - durata estimată de călătorie;
 - numărul de puncte atribuite de sistemul ACA pentru evaluarea caracterului pitoresc al rutei.

Formulare ca **model de flux în rețea**:

- nodul 1, Birmingham, este nodul sursă;
- nodul 11, Virginia Beach, este nodul destinație;
- se expediază o unitate de flux din nodul 1 către nodul 11;
- traseul urmat de această unitate reprezintă ruta selectată

Același model de rețea poate fi utilizat pentru **obiective diferite**:

- ruta cea mai rapidă: minimizarea timpului total de călătorie;
- ruta cu atractivitate maximă: maximizarea scorului total al traseului.



Exemplu – modelul LP complet

Obiectiv: minimizarea timpului de transport

$$\text{Min } 2.5x_{12} + 3x_{13} + 1.7x_{23} + 2.5x_{24} + 1.7x_{35} + 2.8x_{36} + 2x_{46} + 1.5x_{47} + 2x_{56} + 5x_{59} + 3x_{68} \\ + 4.7x_{69} + 1.5x_{78} + 2.3x_{7,10} + 2x_{89} + 1.1x_{8,10} + 3.3x_{9,11} + 2.7x_{10,11}$$

(funcția obiectiv)

s. t.

$$x_{12} + x_{13} = 1$$

(conservare flux nod 1)

$$-x_{12} + x_{23} + x_{24} = 0$$

(conservare flux nod 2)

$$-x_{13} - x_{23} + x_{35} + x_{36} = 0$$

(conservare flux nod 3)

$$-x_{24} + x_{46} + x_{47} = 0$$

(conservare flux nod 4)

$$-x_{35} + x_{56} + x_{59} = 0$$

(conservare flux nod 5)

$$-x_{36} - x_{46} - x_{56} + x_{68} + x_{69} = 0$$

(conservare flux nod 6)

$$-x_{47} + x_{78} + x_{7,10} = 0$$

(conservare flux nod 7)

$$-x_{68} - x_{78} + x_{89} + x_{8,10} = 0$$

(conservare flux nod 8)

$$-x_{59} - x_{69} - x_{89} + x_{9,11} = 0$$

(conservare flux nod 9)

$$-x_{7,10} - x_{8,10} + x_{10,11} = 0$$

(conservare flux nod 10)

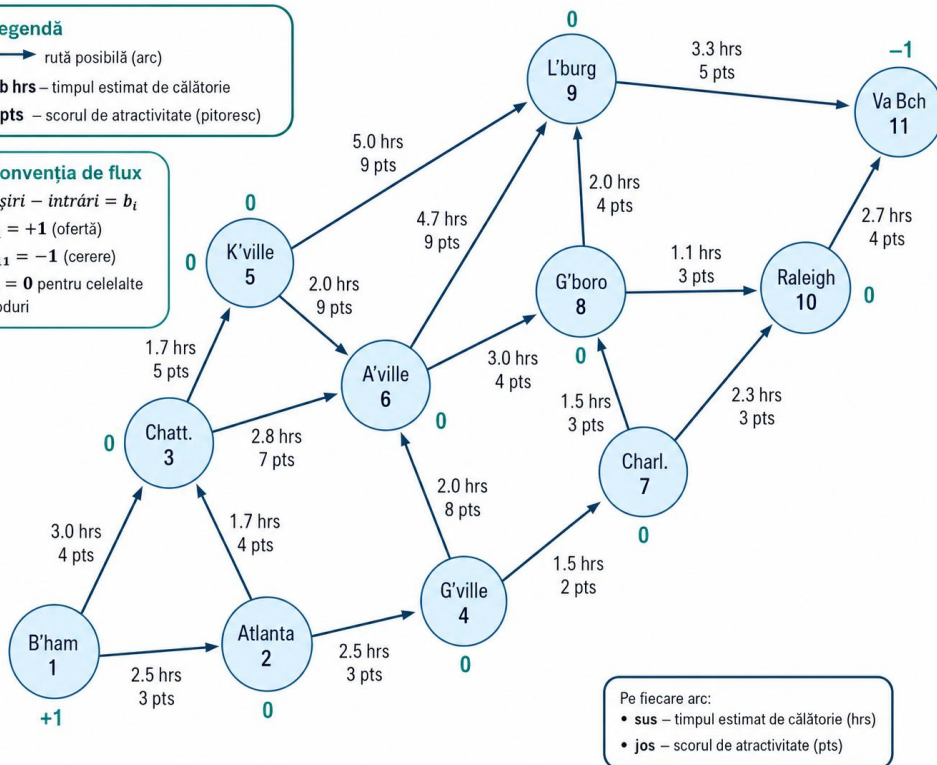
$$-x_{9,11} - x_{10,11} = -1$$

(conservare flux nod 11)

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j$$

Legendă
 → rută posibilă (arc)
 a.b hrs – timpul estimat de călătorie
 c pts – scorul de atractivitate (pitoresc)

Convenția de flux
 ieșiri – intrări = b_i
 $b_1 = +1$ (ofertă)
 $b_{11} = -1$ (cerere)
 $b_i = 0$ pentru celelalte noduri



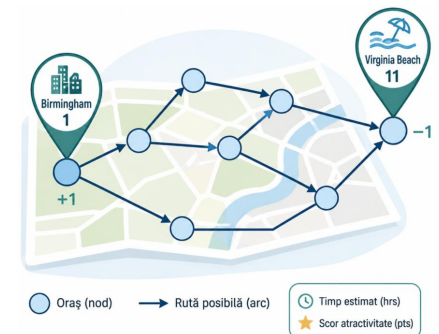
Exemplu – soluția optimă (I)

- Soluția optimă, atunci când obiectivul este **minimizarea timpului de transport**, indică traseul **Birmingham → Atlanta → Greenville → Charlotte → Raleigh → Virginia Beach**

De la	La	Timp traseu	Rată peisaj	Variabile de decizie					Flux rețea		Ofertă/ cerere
1 Birmingham	2 Atlanta	2.5	3	1							
1 Birmingham	3 Chattanooga	3.0	4	0							
2 Atlanta	3 Chattanooga	1.7	4	0							
2 Atlanta	4 Greenville	2.5	3	1							
3 Chattanooga	5 Knoxville	1.7	5	0							
3 Chattanooga	6 Asheville	2.8	7	0							
4 Greenville	6 Asheville	2.0	8	0							
4 Greenville	7 Charlotte	1.5	2	1							
5 Knoxville	6 Asheville	2.0	9	0							
5 Knoxville	9 Lynchburg	5.0	9	0							
6 Asheville	8 Greensboro	3.0	4	0							
6 Asheville	9 Lynchburg	4.7	9	0							
7 Charlotte	8 Greensboro	1.5	3	0							
7 Charlotte	10 Raleigh	2.3	3	1							
8 Greensboro	9 Lynchburg	2.0	4	0							
8 Greensboro	10 Raleigh	1.1	3	0							
9 Lynchburg	11 Virginia Beach	3.3	5	0							
10 Raleigh	11 Virginia Beach	2.7	4	1							
Total		11.5	15								

Durata totală așteptată de-a lungul acestei rute este de 11.5 ore

Această rută primește un rating de 15 puncte pentru peisaj



Exemplu – soluția optimă (II)

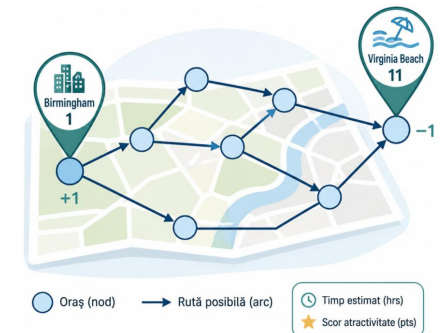
- Soluția optimă, atunci când obiectivul este **traseul cu cel mai mare rating pentru peisaj**, ruta este **Birmingham → Atlanta → Chattanooga → Knoxville → Asheville → Lynchburg → Virginia Beach**

De la	La	Timp traseu	Rată peisaj	Variabile de decizie		Noduri	Flux rețea		Ofertă cerere
1 Birmingham	2 Atlanta	2.5	3	1		1 Birmingham	1	=	1
1 Birmingham	3 Chattanooga	3.0	4	0		2 Atlanta	0	=	0
2 Atlanta	3 Chattanooga	1.7	4	1		3 Chattanooga	0	=	0
2 Atlanta	4 Greenville	2.5	3	0		4 Greenville	0	=	0
3 Chattanooga	5 Knoxville	1.7	5	1		5 Knoxville	0	=	0
3 Chattanooga	6 Asheville	2.8	7	0		6 Asheville	0	=	0
4 Greenville	6 Asheville	2.0	8	0		7 Charlotte	0	=	0
4 Greenville	7 Charlotte	1.5	2	0		8 Greensboro	0	=	0
5 Knoxville	6 Asheville	2.0	9	1		9 Lynchburg	0	=	0
5 Knoxville	9 Lynchburg	5.0	9	0		10 Raleigh	0	=	0
6 Asheville	8 Greensboro	3.0	4	0		11 Virginia Beach	-1	=	-1
6 Asheville	9 Lynchburg	4.7	9	1					
7 Charlotte	8 Greensboro	1.5	3	0					
7 Charlotte	10 Raleigh	2.3	3	0					
8 Greensboro	9 Lynchburg	2.0	4	0					
8 Greensboro	10 Raleigh	1.1	3	0					
9 Lynchburg	11 Virginia Beach	3.3	5	1					
10 Raleigh	11 Virginia Beach	2.7	4	0					
Total		15.9	35						

Durata totală așteptată de-a lungul acestei rute este de 15.9 ore

Constrângeri

Accesibil



Exemplu – soluția optimă

Soluția optimă, atunci când **obiectivul** este

➤ Minimizarea timpului total de călătorie:

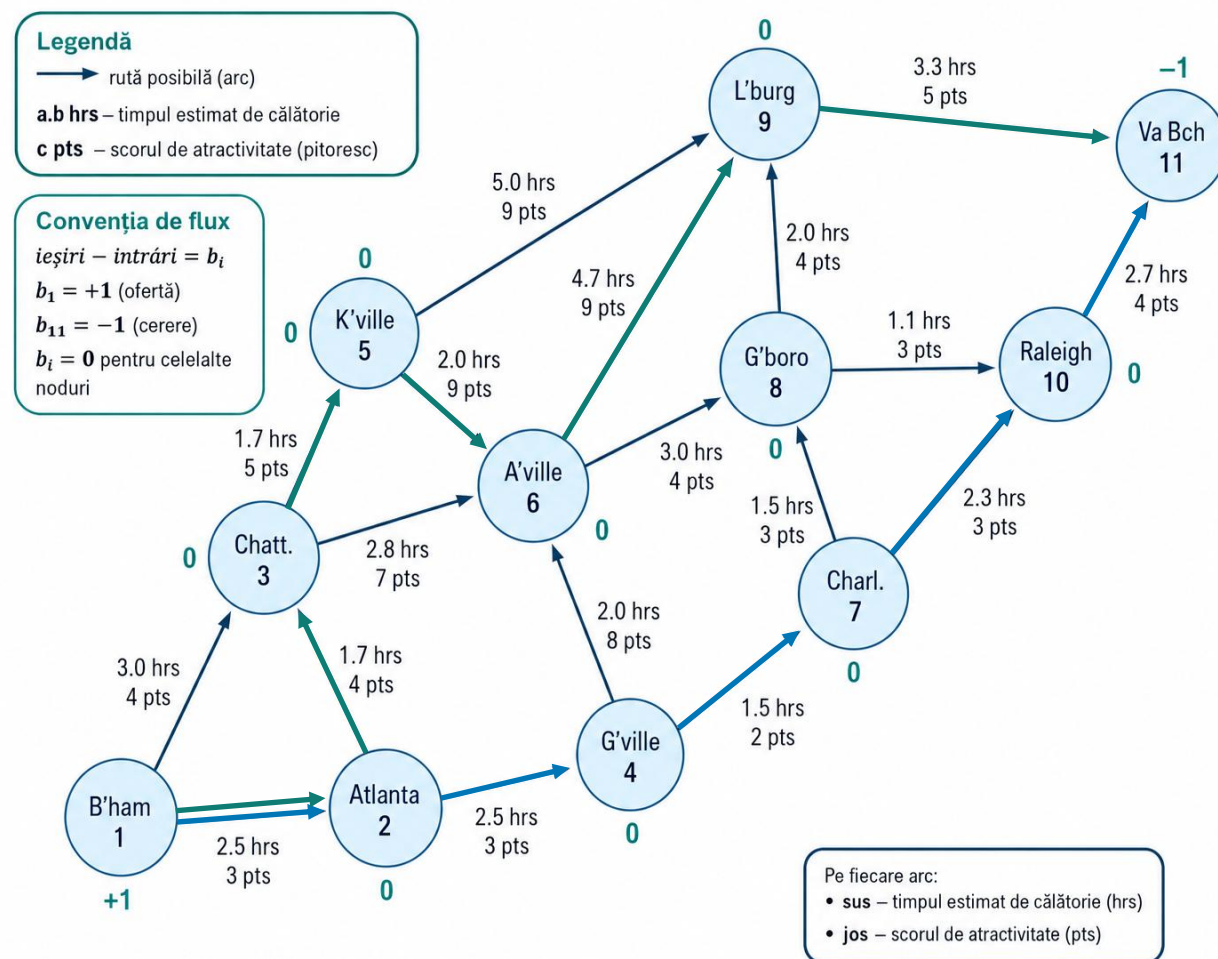
Birmingham → Atlanta → Greenville → Charlotte → Raleigh → Virginia Beach

- Durata totală: **11.5 ore**
- Rating peisaj: 15 puncte

➤ Maximizarea ratingului pentru peisaj:

Birmingham → Atlanta → Chattanooga → Knoxville → Asheville → Lynchburg → Virginia Beach

- Durata totală: 15.9 ore
- Rating peisaj: **35 puncte**



Cuprins

Probleme de aflare a celei mai scurte rute

Probleme de flux maxim

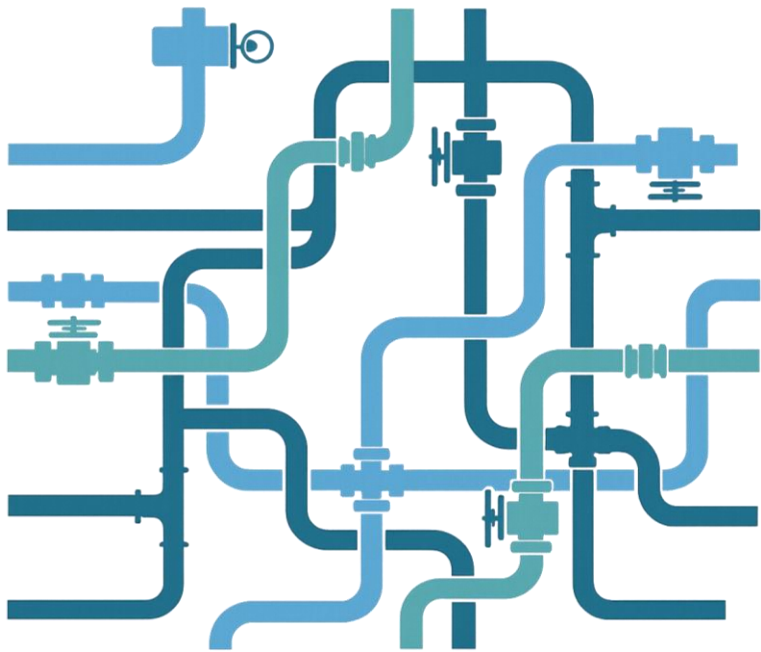
- Model LP
- Exemplu: TransGaz
- Optimizarea capacității de restaurare în rețeaua AT&T

Aplicații ale modelelor de rețea

Rezumat

Probleme de flux maxim

Problema de flux maxim urmărește determinarea volumului maxim de flux care poate fi transmis printr-o rețea, de la un nod sursă la un nod destinație, într-o perioadă de timp dată



Capacități pe arce

Fiecare arc are o capacitate maximă admisibilă, care limitează cantitatea maximă de flux ce poate trece prin acel arc

Ex: numărul de benzi și capacitatea drumurilor limitează fluxul de vehicule într-un sistem de transport

Ex: diametrul conductelor limitează debitul de fluid într-un sistem de distribuție

Capacitate de flux pe arc

Capacitatea unui arc reprezintă limita superioară a fluxului care poate fi transportat prin acel arc într-o perioadă de timp dată

➤ Pentru nodurile intermediare se presupune, de regulă, conservarea fluxului: fluxul de intrare este egal cu fluxul de ieșire

Probleme de flux maxim: formularea modelului LP

- Problema fluxului maxim poate fi formulată ca o **problemă de trafic combinat cu capacități**
 - Se adaugă un arc artificial de la nodul destinație înapoi la nodul sursă
 - Fluxul pe acest arc reprezintă fluxul total transmis prin rețea
 - Pentru acest arc nu se impune o capacitate maximă
- ❑ Există câte o variabilă pentru fiecare arc
- ❑ Pentru fiecare nod se impune conservarea fluxului: fluxul de ieșire este egal cu fluxul de intrare
- ❑ Pentru fiecare arc inițial se impune o constrângere de capacitate

Notății

x_{ij} – fluxul peste arcul $i \rightarrow j$

c_{ij} – capacitatea arcului $i \rightarrow j$, pentru arcele inițiale

A – mulțimea arcelor inițiale ale rețelei

A' – mulțimea arcelor după adăugarea arcului artificial $k \rightarrow 1$

x_{k1} – fluxul total transmis prin rețea

Obiectiv

Maximizarea fluxului pe arcul artificial destinație $\rightarrow$ sursă

- Acest flux este egal cu fluxul total transmis prin rețea



Max

(funcție obiectiv)

s. t.

$$\sum_{j:(i,j) \in A'} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in A'} x_{ji} = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad (\text{conservare flux})$$

$$x_{ij} \leq c_{ij}, \quad \forall (i,j) \in A \quad (\text{capacități pe arce})$$

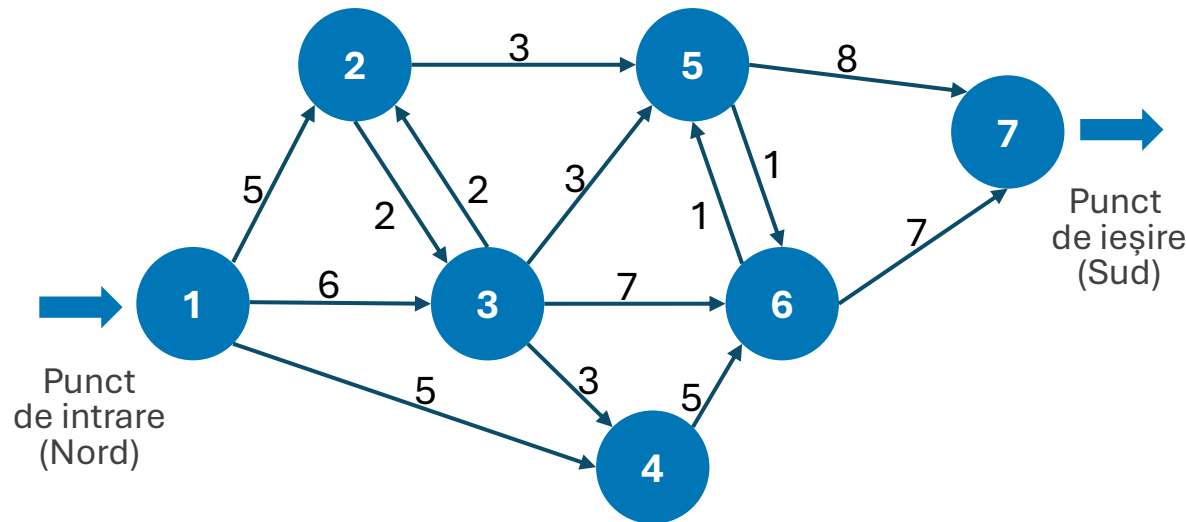
$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i,j) \in A' \quad A' = A \cup \{(k, 1)\}$$

Problemă de flux maxim: exemplu

Ex: TransGaz trebuie să transporte gaz natural dintr-un punct de intrare situat în nordul rețelei către un punct de ieșire situat în sud. În perioadele de iarnă, cererea crește, iar conductele pot fi solicitate să transporte până la **13,000 m³/h**.

În perioadele de revizie și mentenanță, fluxul poate fi redirectionat printr-o rețea alternativă, cu respectarea capacităților maxime ale conductelor.

- Valorile de pe arce reprezintă capacități, exprimate în **mii m³/h**
- Pe arcul 1 → 4 se pot transporta **5000 m³/h**, dar în sens invers nu se poate transporta nimic



Întrebări

- 1) Poate firma TransGaz să transporte prin rețeaua din figură o cantitate de 15,000 m³/h?
- 2) Care este capacitatea maximă de transport pe oră a rețelei?
- 3) Care este fluxul transportat prin fiecare conductă în soluția optimă?

Problemă de flux maxim: exemplu (cont.)

- Pentru a formula modelul LP al problemei de flux maxim, se adaugă un arc artificial de la nodul 7 la nodul 1, care reprezintă fluxul total transmis prin sistem

Variable de decizie

x_{ij} – fluxul transportat pe arcul $i \rightarrow j$

Funcția obiectiv

Max x_{71}

➤ Constrângeri

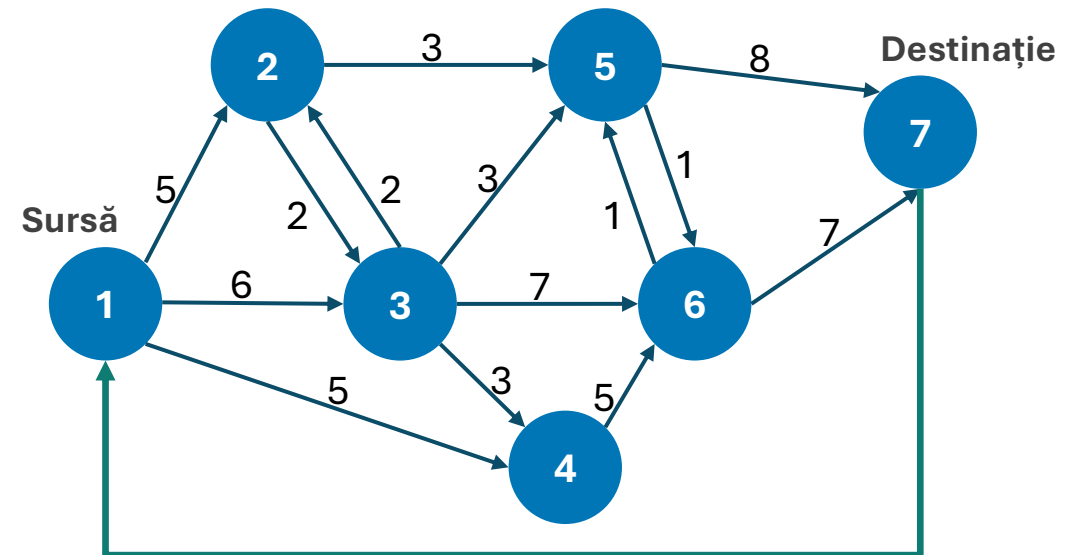
C1 – C7: conservarea fluxului în noduri

	Out		In
Nod 1:	$x_{12} + x_{13} + x_{14}$	=	x_{71}
Nod 2:	$x_{23} + x_{25}$	=	$x_{12} + x_{32}$
Nod 3:	$x_{32} + x_{34} + x_{35} + x_{36}$	=	$x_{13} + x_{23}$
Nod 4:	x_{46}	=	$x_{14} + x_{34}$
Nod 5:	$x_{56} + x_{57}$	=	$x_{25} + x_{35} + x_{65}$
Nod 6:	$x_{65} + x_{67}$	=	$x_{36} + x_{46} + x_{56}$
Nod 7:	x_{71}	=	$x_{57} + x_{67}$

C8 – C21: capacitățile pe arce

$$\begin{aligned}
 x_{12} &\leq 5 & x_{13} &\leq 6 & x_{14} &\leq 5 \\
 x_{23} &\leq 2 & x_{25} &\leq 3 \\
 x_{32} &\leq 2 & x_{34} &\leq 3 & x_{35} &\leq 3 & x_{36} &\leq 7 \\
 x_{46} &\leq 5 \\
 x_{56} &\leq 1 & x_{57} &\leq 8 \\
 x_{65} &\leq 1 & x_{67} &\leq 7
 \end{aligned}$$

$$x_{ij} \geq 0, \forall (i, j) \in A'$$



Exemplu – soluția optimă pentru TransGaz

Arc		Capacitate	Variabile decizie	Flux		Retea	
Nod inceput	Nod final			Nod	Intrare	iesire	RHS
1	2	5	3	1	14	14	0
1	3	6	6	2	3	3	0
1	4	5	5	3	6	6	0
2	3	2	0	4	5	5	0
2	5	3	3	5	7	7	0
3	4	3	0	6	8	8	0
3	5	3	3	7	14	14	0
3	6	7	3				
3	2	2	0				
4	6	5	5				
5	6	1	0				
5	7	8	7				
6	5	1	1				
6	7	7	7				
7	1		14				

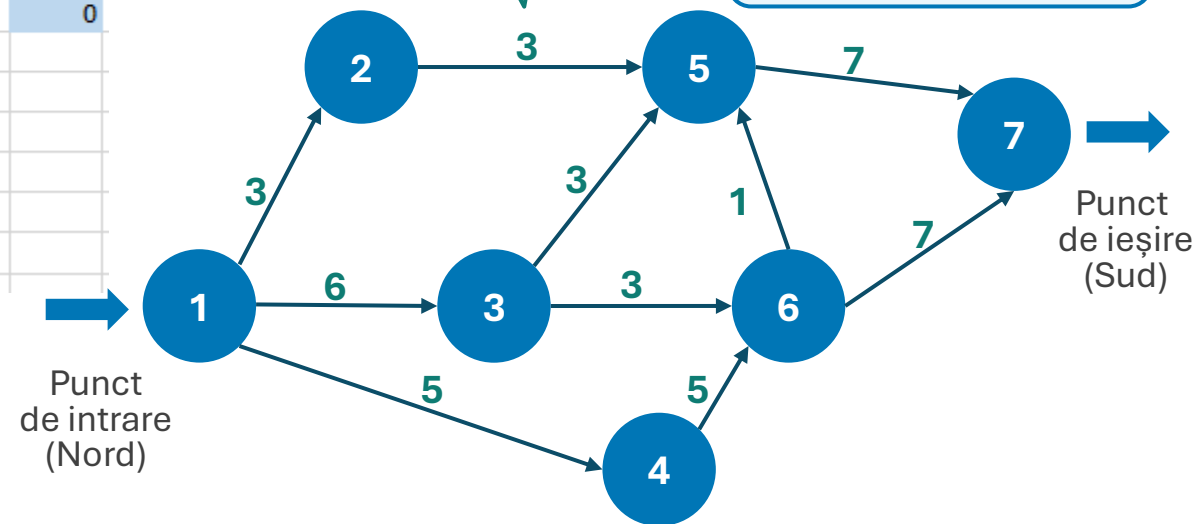
Debit maxim 14

Care este capacitatea maximă de transport pe oră a rețelei?

Fluxul maxim prin sistemul alternativ TransGaz este de **14,000 m³/h**

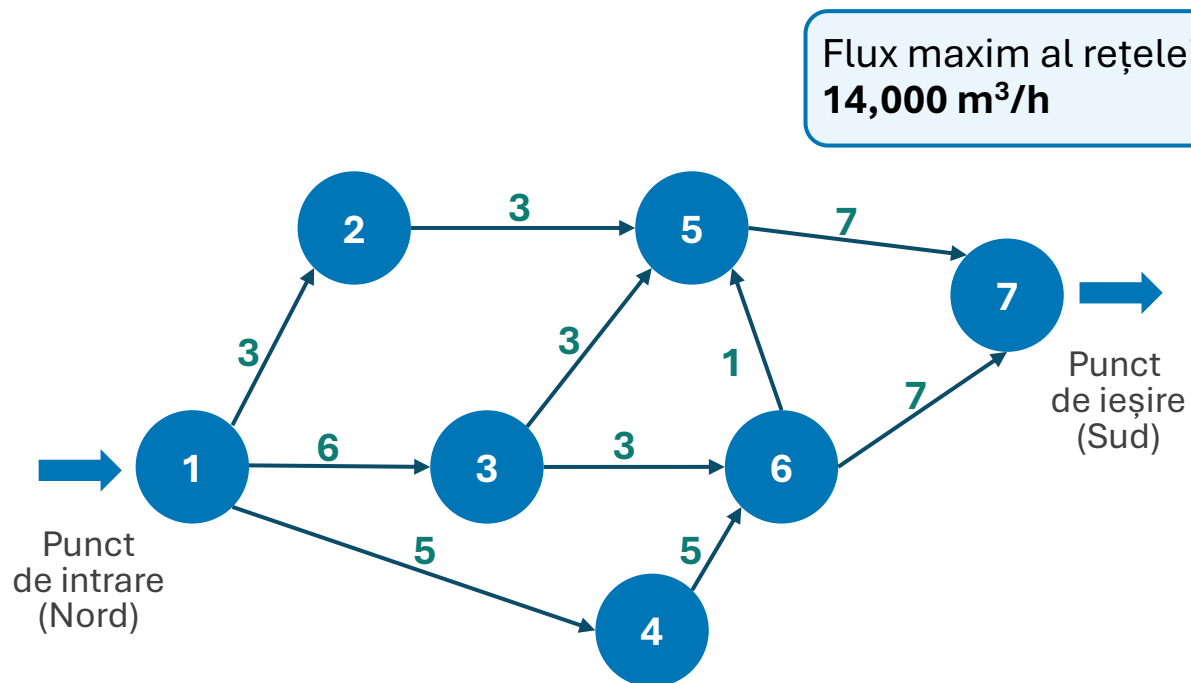
Care este fluxul transportat prin fiecare conductă în soluția optimă?

Flux maxim al rețelei:
14,000 m³/h



Fluxul maxim și rutarea optimă prin rețeaua TransGaz

Exemplu – soluția optimă pentru TransGaz (cont.)



Fluxul maxim și rutarea optimă prin rețeaua TransGaz

Poate firma TransGaz să transporte prin rețeaua din figură o cantitate de **15,000 m³/h**?

- Rezultatul analizei de flux maxim indică faptul că rețeaua de conducte TransGaz nu poate să transporte un flux de 15,000 m³/h
 - Este necesară extinderea capacității de transport pentru a face față perioadelor cu cerere ridicată de gaz
 - Dacă rețeaua este extinsă sau modificată, trebuie realizată o nouă analiză pentru determinarea noului nivel al fluxului maxim

Observații: formulare alternativă a modelului

- Problema de flux maxim poate fi formulată și fără arcul artificial $7 \rightarrow 1$

□ În această variantă:

- Se maximizează fluxul total care intră în nodul destinație 7

$$\text{Max } x_{57} + x_{67}$$

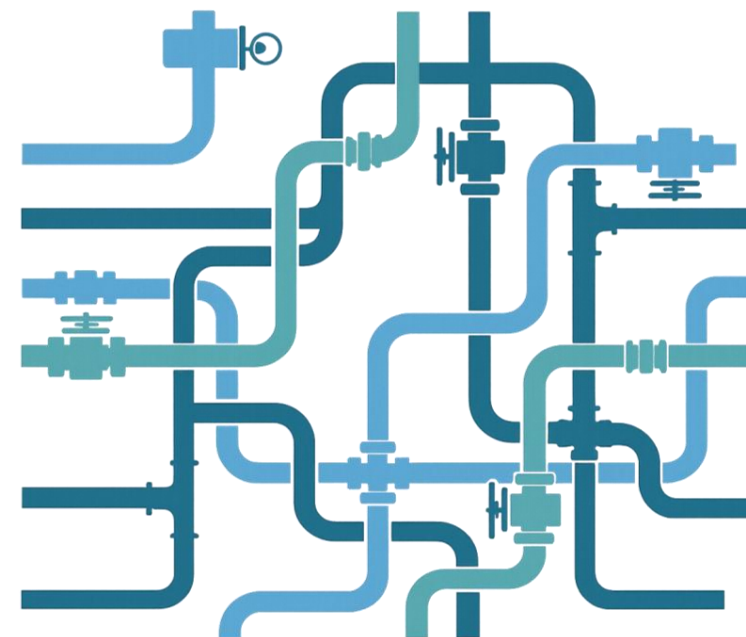
- Echivalent, se poate maximiza fluxul total care pleacă din nodul sursă 1

$$\text{Max } x_{12} + x_{13} + x_{14}$$

- Conservarea fluxului se impune numai pentru nodurile intermediare: 2, 3, 4, 5, 6
- Constrângerile de capacitate rămân aceleași

$$0 \leq x_{ij} \leq c_{ij}$$

- Formularea cu arc artificial este utilă deoarece permite scrierea unei constrângeri de conservare pentru fiecare nod și evidențiază explicit fluxul total prin variabila x_{71}



La momentul studiului, AT&T era o companie internațională de telecomunicații care oferea servicii de voce, date, video, comunicații mobile, satelit și internet pe distanțe lungi

Context operațional

- Compania utiliza echipamente de comutare și transmisie noi pentru a furniza servicii către peste **80 de milioane de clienți**
- În partea continentală a Statelor Unite, rețeaua de transmisie AT&T includea peste **40,000 de mile de cablu de fibră optică**
- În zilele de vârf, AT&T gestiona până la **290 de milioane de apeluri** de diferite tipuri

Risc operațional

Înterruperile de curent, dezastrele naturale, defectarea cablurilor și alte evenimente puteau dezactiva anumite segmente ale rețelei de transmisie

- În astfel de situații, traficul trebuia redirectionat rapid prin capacitatea de rezervă disponibilă
- Obiectivul era restaurarea serviciilor cu întreruperi minime

Decizie de optimizare

În 1997, AT&T a format echipa RestNet pentru a optimiza capacitatea de rezervă necesară restaurării rețelei

Optimizarea capacității de restaurare în rețeaua AT&T²

²Ken Ambs, Sebastian Cwilich, Mei Deng, David J. Houck, David F. Lynch, Dicky Yan, "Optimizing Restoration Capacity in the AT&T Network", *Interfaces* (January/February 2000): 26–44

Model LP la scară largă

Pentru optimizarea capacității de restaurare, echipa RestNet a dezvoltat un model de programare liniară la scară largă

- O subproblemă a modelului urmărea determinarea **cele mai scurte rute** între un nod origine și un nod destinație, atunci când apărea o defecțiune pe un arc al rețelei de transmisie
- O altă subproblemă rezolva o problemă de **flux maxim** pentru identificarea celor mai bune rute de restaurare între comutatoare, în caz de dezastru

Impact managerial: modelul dezvoltat de echipa RestNet a avut un impact semnificativ asupra planificării capacității de rezervă necesare restaurării rețelei AT&T

„Modelul de optimizare a fost foarte util pentru alocarea capacității de restaurare. Ne-a permis să reducem cheltuielile de capital cu zeci de milioane de dolari.”

(C. Michael Armstrong, președinte și CEO AT&T)

Optimizarea capacității de restaurare în rețeaua AT&T²

²Ken Ambs, Sebastian Cwilich, Mei Deng, David J. Houck, David F. Lynch, Dicky Yan, "Optimizing Restoration Capacity in the AT&T Network", *Interfaces* (January/February 2000): 26–44

Cuprins

Probleme de aflare a celei mai scurte rute

Probleme de flux maxim

Aplicații ale modelelor de rețea

- Planificarea producției și gestionarea stocurilor
- Optimizarea rețelei Yellow Freight

Rezumat

Aplicație: planificarea producției și gestionarea stocurilor

Modelele pentru problemele de transport și transbordare pot fi extinse și la aplicații în care fluxul nu reprezintă neapărat deplasarea fizică a mărfurilor între surse și destinații

Exemplu: planificarea producției și gestionarea stocurilor

- fluxul poate reprezenta cantități produse, livrate sau păstrate în stoc
- nodurile pot reprezenta perioade de timp, capacități de producție sau cereri aferente unor perioade
- arcele pot reprezenta producție, transfer de stoc între perioade sau livrare pentru acoperirea cererii

Idee-cheie: un model de transbordare poate descrie modul în care producția disponibilă într-o perioadă este utilizată pentru satisfacerea cererii curentă sau este transferată, ca stoc, către perioadele următoare

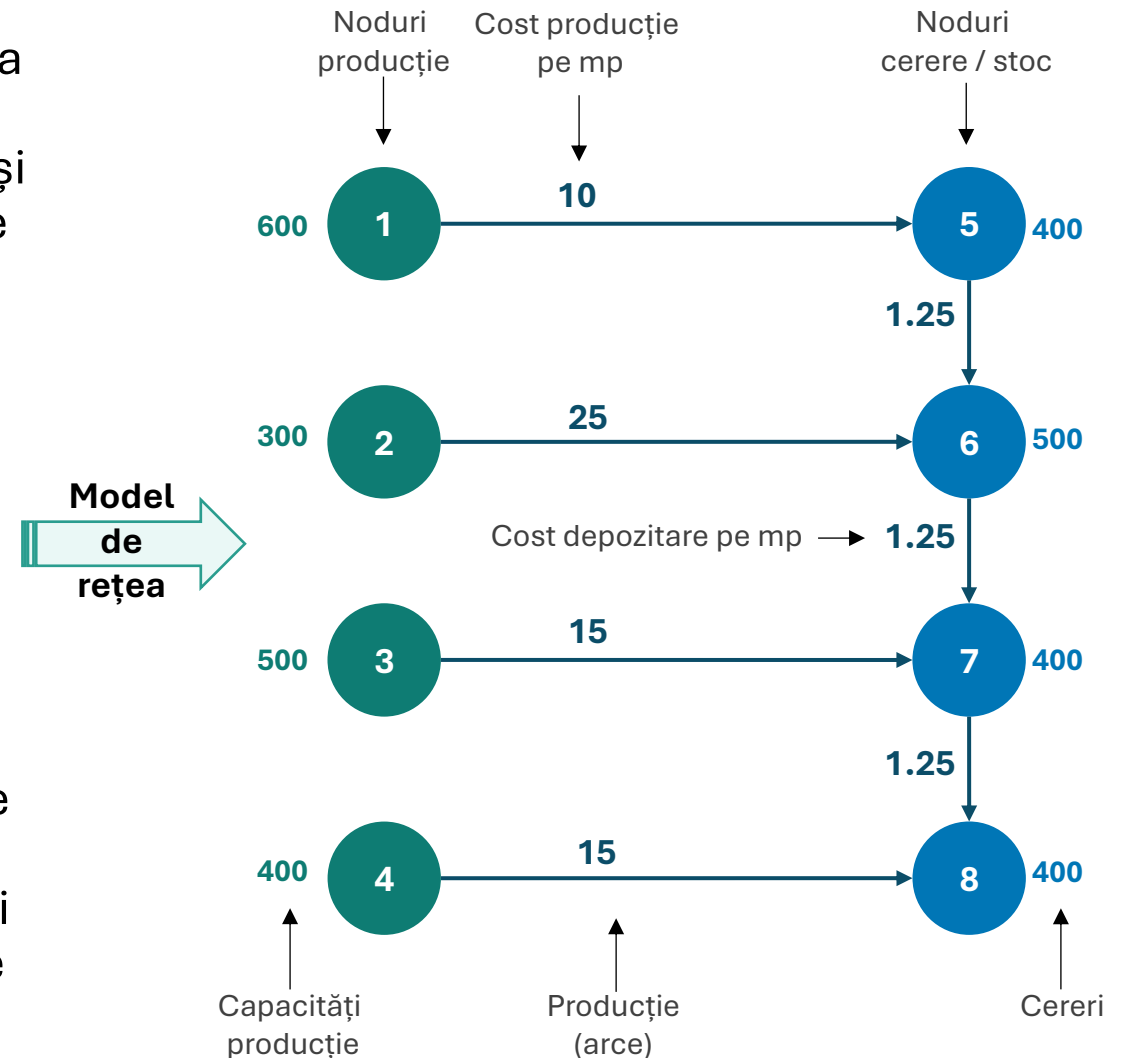


Planificarea producției și gestionarea stocurilor: exemplu

Ex: Fabrica Incov din Alba Iulia produce covoare. Aceasta trebuie să-și planifice producția. Capacitatea de producție, cererea, costul de producție pe metru pătrat și costul de depozitare pe metru pătrat pentru următoarele patru trimestre sunt prezentate în tabel.

Trimestru	Capacitate producție [mp]	Cerere [mp]	Cost producție [lei/mp]	Cost depozitare [lei/mp]
1	600	400	10	1.25
2	300	500	25	1.25
3	500	400	15	1.25
4	400	400	15	1.25

Capacitatea, cererea și costurile de producție variază în funcție de trimestru, în timp ce costul de depozitare este constant (1.25 lei/mp). Incov dorește să stabilească numărul de metri pătrați de covoare care trebuie produși în fiecare trimestru, astfel încât costul total de producție și depozitare pentru cele patru trimestre să fie minim.



Exemplu – formularea modelului LP

Variabile de decizie

x_{ij} – cantitatea produsă sau transferată în stoc pe arcul $i \rightarrow j$

Funcția obiectiv: minimizarea costului total de producție și depozitare

$$\text{Min } 10x_{15} + 25x_{26} + 15x_{37} + 15x_{48} + 1.25x_{56} + 1.25x_{67} + 1.25x_{78}$$

➤ Constrângeri

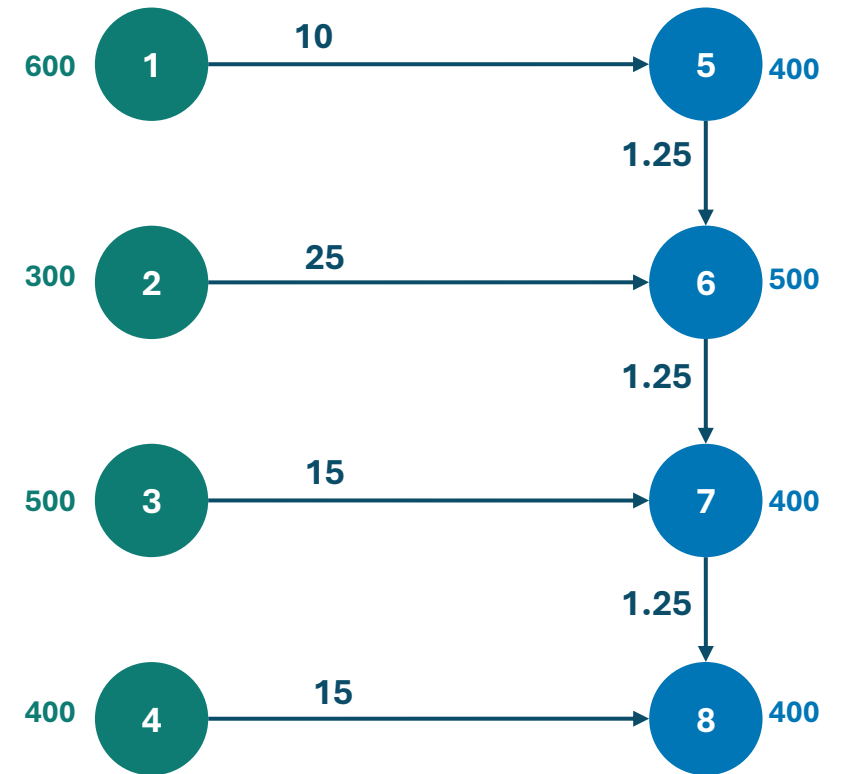
C1 – C4: capacități de producție

- Trimestrul 1: $x_{15} \leq 600$
- Trimestrul 2: _____
- Trimestrul 3: _____
- Trimestrul 4: _____

C5 – C8: restricții de cerere și bilanț al stocului

- Trimestrul 1 (nod 5): $x_{15} - x_{56} = 400$
- Trimestrul 2 (nod 6): _____
- Trimestrul 3 (nod 7): _____
- Trimestrul 4 (nod 8): _____

$$x_{ij} \geq 0$$



Exemplu – soluția optimă

➤ Pentru a obține un cost minim de **25,750 lei**, Incov

▪ Ar trebui **să producă**:

- 600 mp de covoare în trimestrul 1
- 300 mp de covoare în trimestrul 2
- 400 mp de covoare în trimestrul 3
- 400 mp de covoare în trimestrul 4

▪ Și să păstreze **în stoc** 200 mp la finalul trimestrului 1, pentru a fi utilizați în trimestrul 2



Arc		Unitati									
Nod intrare	Nod iesire	Cost	expediate	Unitati expediate				Retea			
				Nod	In	Out	Expedieri		Oferta		
Productie trim 1	Cerere trim 1	10	600	Productie trim 1		600	600	<=	600		
Productie trim 2	Cerere trim 2	25	300	Productie trim 2		300	300	<=	300		
Productie trim 3	Cerere trim 3	15	400	Productie trim 3		400	400	<=	500		
Productie trim 4	Cerere trim 4	15	400	Productie trim 4		400	400	<=	400		
Cerere trim 1	Cerere trim 2	1.25	200	Cerere trim 1	600	200	-400	=	-400		
Cerere trim 2	Cerere trim 3	1.25	0	Cerere trim 2	500	0	-500	=	-500		
Cerere trim 3	Cerere trim 4	1.25	0	Cerere trim 3	400	0	-400	=	-400		
				Cerere trim 4	400		-400	=	-400		
				Minimizare cost total		25750					

La momentul studiului, Yellow Freight System, Inc., cu sediul în Overland Park, Kansas, era unul dintre cei mai mari transportatori rutieri de mărfuri din Statele Unite.

Context operațional

Compania utiliza modelarea și optimizarea rețelei pentru sprijinirea deciziilor privind:

- încărcarea și rutarea camioanelor și remorcilor;
- utilizarea camioanelor și remorcilor goale;
- eliminarea sau adăugarea rutelor directe de serviciu;
- planificarea strategică a dimensiunii și localizării terminalelor.

Sistemul SYSNET

- Sistemul SYSNET funcționa pe o rețea de stații de lucru Sun.
- Modelul optima peste **un milion de variabile de flux** în rețea
- Compania utiliza și o sală de planificare tactică, dotată cu instrumente grafice interactive pentru analiza scenariilor de rețea

Sistemul Yellow Freight – optimizarea rețelei³

³Braklow, John W., William W. Graham, Stephen M. Hassler, Ken E. Peck, Warren B. Powell, "Interactive Optimization Improves Service and Performance for Yellow Freight System", *Interfaces* (January/February 1992): 22:1, p. 147-172

Yellow Freight concursa pe piața transportului rutier de mărfuri de *tip less-than-truckload* (LTL)

Specificul transportului LTL

- Transporturile aveau dimensiuni variabile și nu ocupau neapărat o remorcă întreagă
- Pentru operare eficientă, mărfurile trebuiau combinate, transferate și redistribuite prin terminale intermediare
- Yellow Freight utiliza **23 de terminale intermediare** distribuite pe teritoriul Statelor Unite

Decizii operaționale

- În terminalele intermediare, mărfurile puteau fi reîncărcate în remorci diferite, în funcție de destinația finală
- Uneori, managerii locali încercau să reducă costurile trimițând marfa direct către terminalele finale
- Înainte de SYSNET, aceste decizii erau luate local, fără o imagine completă asupra impactului asupra costurilor și fiabilității întregului sistem

Sistemul Yellow Freight – optimizarea rețelei³

³Braklow, John W., William W. Graham, Stephen M. Hassler, Ken E. Peck, Warren B. Powell, "Interactive Optimization Improves Service and Performance for Yellow Freight System", *Interfaces* (January/February 1992): 22:1, p. 147-172

De la implementarea sistemului, în 1989, SYSNET a îmbunătățit semnificativ managementul rețelei

Beneficii raportate

- Creștere cu **11.6%** a mărfurilor transportate direct la destinație, cu economii anuale de **4.7 milioane dolari**
- Rutare mai bună a remorcilor, cu economii anuale de aproximativ **1 milion de dolari**
- Economii anuale de **1.42 milioane dolari** prin creșterea numărului mediu de livrări pe remorcă
- Reducere cu **27%** a livrărilor întârziate
- În 1990, proiectele de planificare strategică bazate pe SYSNET au generat economii anuale de aproximativ **10 milioane dolari**

Impact managerial

- Managerii au obținut un control mai bun asupra operațiunilor de rețea
- Deciziile bazate pe intuiție au fost înlocuite cu analize cantitative
- Compania a putut evalua mai rapid efectul modificărilor de rutare, capacitate și localizare a terminalelor

Sistemul Yellow Freight – optimizarea rețelei³

³Braklow, John W., William W. Graham, Stephen M. Hassler, Ken E. Peck, Warren B. Powell, "Interactive Optimization Improves Service and Performance for Yellow Freight System", *Interfaces* (January/February 1992): 22:1, p. 147-172

Rezumat



- În cursurile 6 și 7 au fost introduse probleme speciale de flux în rețea:
 - probleme de transport;
 - probleme de transbordare / trafic combinat;
 - probleme de atribuire / alocare;
 - probleme de aflare a celei mai scurte rute;
 - probleme de flux maxim.
- Toate aceste modele pot fi formulate ca programe liniare în care:
 - nodurile reprezintă surse, destinații și, dacă este necesar, puncte intermediare;
 - arcele reprezintă legături posibile între noduri;
 - variabilele de decizie descriu cantități transportate, alocate sau fluxuri transmise prin rețea.
- **Problema de transport** conține m surse și n destinații
 - Pornind de la oferta fiecărei surse, cererea fiecărei destinații și costurile unitare de transport, modelul determină cantitățile optime expediate de la surse la destinații
- **Problema de transbordare / trafic combinat** extinde problema de transport prin introducerea unor noduri intermediare, în care fluxul poate intra și ieși din rețea
 - Dacă se impun limite pe arce, se obține un model de trafic combinat cu capacități

Rezumat



- **Problema de atribuire / alocare** este un caz particular al problemei de transport, în care ofertele și cererile sunt egale cu 1
 - fiecare agent este reprezentat ca nod sursă;
 - fiecare sarcină este reprezentată ca nod destinație;
 - modelul determină atribuirea optimă, astfel încât costul total să fie minim sau profitul total să fie maxim.
- **Problema celei mai scurte rute** determină drumul optim între două noduri ale unei rețele
 - criteriul optimizat poate fi distanța, timpul, costul sau un alt indicator relevant;
 - problema poate fi formulată ca un model de flux cu o singură sursă și o singură destinație;
 - ruta optimă este obținută prin transmiterea unei unități de flux de la sursă la destinație.
- **Problema fluxului maxim** determină fluxurile pe arce astfel încât fluxul total transmis prin rețea să fie maxim
 - fiecare arc are o capacitate maximă;
 - modelul poate fi formulat ca o problemă de trafic combinat cu capacități;
 - aplicațiile includ rețele de transport, conducte, comunicații și sisteme logistice.
- **Aplicație suplimentară:** modelele de transbordare pot fi utilizate și pentru planificarea producției și gestionarea stocurilor, unde fluxul reprezintă producție, livrare sau stoc reportat între perioade

Rezumat

Idei-cheie

- Problemele de rețea pot fi formulate ca modele LP
- Nodurile, arcele și fluxurile permit modelarea unor situații diverse
- Aceeași structură de model poate descrie transport, alocare, rutare, flux maxim, producție și stocuri



Rezumat

Probleme de aflare a celei mai scurte rute

- ✓ Model LP
- ✓ Exemple: Nord Construct, ACA

Probleme de flux maxim

- ✓ Model LP
- ✓ Exemplu: TransGaz
- ✓ Optimizarea capacității de restaurare în rețeaua AT&T

Aplicații ale modelelor de rețea

- ✓ Planificarea producției și gestionarea stocurilor
- ✓ Optimizarea rețelei Yellow Freight

→ Analiza decizională (I)